*** R R - 0 8 2 8 / 6 0 0 ***

RR-0828

Third Year B. Sc Examination

March / April – 2010

Mathematics : Paper - VII

(Abstract Algebra)

(New Course)

Time : Hours] [Total Marks :

સૂચના :

(૧)

નીચે દર્શાવેલ ☛ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.
Fillup strictly the details of ☛ signs on your answer book.

Name of the Examination :

☛ **T. Y. B. Sc.**

Name of the Subject :

☛ **Mathematics - 7 (New)**

☛ Subject Code No. : **0 8 2 8** ☛ Section No. (1, 2,.....) : **Nil**

Seat No. :

Student's Signature

(૨) બધા જ પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો.

(૩) **જમણી** બાજુના અંક ગુણ સૂચવે છે.

(૪) સામાન્ય સંકેતોને અનુસરો.

૧ નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો : **૧૫**

(૧) જો $a \equiv b \pmod{n}$ અને $c \equiv d \pmod{n}$ હોય, તો સાબિત કરો કે $ac \equiv bd \pmod{n}$

(૨) જો Gએ સાન્ત સમૂહ હોય તથા $a \in G$ હોય તો સાબિત કરો કે $a^{0(G)} = e$.

(૩) સમક્રમી મંડળ $\langle R, +_6, X_6 \rangle$; જ્યાં $R = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$માં શૂન્ય ભાજકો શોધો. મંડળ Rએ પૂર્ણપ્રદેશ છે કે નહિ તે નક્કી કરો.

(૪) Rએ યુક્લિડિયન મંડળ છે અને bએ Rનો એકમ હોય તો, Rના તમામ શૂન્યેતર a માટે દર્શાવો કે $d(a) = d(ab)$.

(૫) નીચેનાં પદોની વ્યાખ્યા આપો :

(૧) ઉપસમૂહની ઘાતાંક

(૨) જૂથ મંડળ

(૩) યુક્લિડીયન મંડળમાં અવિભાજ્ય ઘટક.

૨ (અ) યુક્લિડીયન અલ્ગોરિધમ જણાવો. જો a અને b શૂન્યેતર પૂર્ણાંકો હોય તો સાબિત કરો કે ગુ.સા.અ. (a, b) અનન્ય છે. એ પણ સાબિત કરો કે ગુ.સા.અ. $(a,b)=1$ અને $a|bc \Rightarrow a|c$. ૭

(બ) સામાન્ય સંકેતોમાં સાબિત કરો કે : ૬

(૧) $ab \equiv ac \pmod{n}$ અને $(a,c)=1 \Rightarrow b \equiv c \pmod{n}$

(૨) $a|x,\ b|x$ અને ગુ.સા.અ. $(a,b)=1 \Rightarrow (ab)|x$.

(ક) સાબિત કરો કે 1ના n-માં મૂળો ગુણાકાર વિષે સમૂહ રચે છે. ૫

અથવા

૨ (અ) સાબિત કરો કે સંબંધ "nને સાપેક્ષ સમશેષ સંબંધ"; $n \in I$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગણમાં સામ્યતાનો સંબંધ છે. એ પણ સાબિત કરો કે તે n ભિન્ન સામ્ય વર્ગો બનાવે છે. ૭

(બ) જો a અને b ધનપૂર્ણાંકો હોય તો સાબિત કરો કે ૬

લ.સા.અ. (a, b) ગુ.સા.અ. $(a,b)=ab$

(ક) સાબિત કરો કે ચાર ઘટકવાળો પ્રત્યેક સમૂહ સમક્રમી છે. ૫

૩ (અ) સમૂહ Gનો અરિક્ત સાન્ત ઉપગણ H છે. જો H ગુણાકાર વિશે સંવૃત્ત હોય, તો સાબિત કરો કે H એ સમૂહ Gનો ઉપસમૂહ છે. સમૂહ Gનું કેન્દ્ર, Gનો ઉપસમૂહ છે એમ પણ સાબિત કરો. ૭

(બ) સમૂહ Gનો ઉપસમૂહ H છે. સામાન્ય સંકેતમાં સાબિત કરો કે ૬

$Ha=\{x \in G \mid a \equiv x \pmod{H}\}$

(ક) સાન્ત સમૂહ Gના ઘટકની કક્ષાની વ્યાખ્યા આપો. તે પરથી S_3ના દરેક ઘટકની કક્ષા મેળવો. ૫

અથવા

૩ (અ) સમૂહ Gના બે ઉપસમૂહો H અને K છે. સાબિત કરો કે Gનો ઉપસમૂહ HK હોય તો અને તો જ $HK=KH$.

(બ) સાબિત કરો કે સમૂહ Gના ઉપસમૂહ Hના કોઈ પણ બે વામ સહગણો વચ્ચે એક-એક સંગતતા છે.

(ક) જો સમૂહ Gમાં $a^5=e$ અને $aba^{-1}=b^2$, કોઈક $a,b \in G$ તો $0(b)$ શોધો.

૪ (અ) સાબિત કરો કે જો સમૂહ Gમાં ઉપસમૂહ N એ નિયત ઉપસમૂહ હોય તો અને તો જ બે દક્ષિણ સહગણોનો ગુણાકાર પણ દક્ષિણ સહગણ થાય છે. ૭

(બ) જો ગર્ભ K વાળી સમૂહ Gથી સમૂહ $\bar{G}$માં સમરૂપતા ϕ હોય તો સાબિત કરો કે Kએ Gનો નિયત ઉપસમૂહ છે. જો $K = (e)$ હોય તો સાબિત કરો કે ϕએ એકરૂપતા છે. ૬

(ક) $S_3 = \left\{e, \phi, \psi, \psi^2, \phi\psi, \phi\psi^2\right\}$ અને $\bar{G} = \{e, \phi\}$. વિધેય ૫

$f : S_3 \to \bar{G};\ f\left(\phi^i \psi^j\right) = \phi^i$ વડે વ્યાખ્યાયિત કરો. સાબિત કરો કે f સમરૂપતા છે.

અથવા

૪ (અ) ધારો કે ϕ એ K ગર્ભવાળી સમૂહ G પરથી સમૂહ $\bar{G}$ પરની વ્યાપ્ત સમરૂપતા છે. તો સાબિત કરો કે ${G}/{K}$એ $\bar{G}$ સાથે એકરૂપ છે. ૭

(બ) જો $G = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \middle| a, b, d \in R \text{ અને } ad \neq 0\right\}$એ શ્રેણિકોના ગુણાકાર ૬

હેઠળ સમૂહ હોય અને $N = \left\{\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| b \in R\right\}$. સાબિત કરો કે Nએ

Gનો નિયત ઉપસમૂહ છે.

(ક) સાબિત કરો કે પ્રત્યેક ક્રમચય $f \in S_n$ને પરસ્પર અલગ ચક્રોનાં અનન્ય સંયોજન તરીકે દર્શાવી શકાય ૫

ક્રમચય $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 6 & 4 & 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ના ચક્રો શોધો.

૫ (અ) ધારો કે ϕ એ મંડળ Rથી મંડળ $\bar{R}$ પરથી સમરૂપતા છે. સાબિત કરો કે ϕ એકરૂપતા હોય તો અને તો જ $\ker \phi = \{0\}$ થાય. ૭

(બ) જો D પૂર્ણ પ્રદેશ હોય અને Dની લાક્ષણિકતા સાન્ત હોય તો સાબિત કરો કે એ લાક્ષણિકતા અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.

(ક) જો $J\left(\sqrt{2}\right)=\left\{m+n\sqrt{2}\middle| m_1\, n\in I\right\}$ એ સામાન્ય સરવાળા અને ગુણકાર હેઠળ મંડળ હોય અને

$\phi : J\left(\sqrt{2}\right)\to J\left(\sqrt{2}\right), \phi\left(m+n\sqrt{2}\right)=m-n\sqrt{2}$ વડે વ્યાખ્યાયિત હોય તો સાબિત કરો કે ϕએ ગર્ભ $\phi=\{0\}$ સહિત વ્યાપ્ત સમરૂપતા છે.

અથવા

૫ (અ) સાબિત કરો કે સાન્ત પૂર્ણ પ્રદેશ ક્ષેત્ર છે. ૭

(બ) Rએ સમક્રમી મંડળ છે. સાબિત કરો કે Rએ પૂર્ણપ્રદેશ હોય તો અને તો જ $a,b,c\in R\,;a\neq 0$ માટે $ab=ac\Rightarrow b=c$. ૬

(ક) Jએ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનું મંડળ છે. J_n એ સમશેષ nપૂર્ણાંક સંખ્યાઓનું મંડળ છે. $\phi : J\to J_n\,;\phi(a)=a$ને n થી ભાગતાં શેષ વધે; વડે વ્યાખ્યાયિત છે. સાબિત કરો કે ϕએ વ્યાપ્ત સમરૂપતા છે. ગર્ભ ϕ પણ શોધો. ૫

૬ (અ) સાબિત કરો કે જો, યુક્લિડીય મંડળ R માં a એકમ ઘટક હોય તો અને તો જ $d(a)=d(1)$. ૭

(બ) સાબિત કરો કે યુક્લિડીય મંડળ એકમ ઘટક ધારણ કરે છે. ૬

(ક) સંવૃત્ત એકમ અંતરાલ પર વ્યાખ્યાયિત બધા જ વાસ્તવિક સતત વિધેયોનું મંડળ R છે. ધારો કે $M=\left\{f(x)\in R \,\middle|\, f\left(\frac{1}{2}\right)=0\right\}$ છે. સાબિત કરો કે M એ Rનું ગુરુત્તમ ઇષ્ટમંડળ છે. ૫

અથવા

૬ (અ) સાબિત કરો કે સમક્રમી મંડળના બે ઘટકો વચ્ચેનો સહઘટક સંબંધ એ સામ્ય સંબંધ છે. ૭

(બ) Rએ યુક્લિડીય પ્રદેશ છે અને $a,b\in R$ જો $b\neq 0$એ Rનો એકમ ઘટક હોય તો સાબિત કરો કે $d(a)<d(ab)$. ૬

(ક) જો R મંડળ હોય અને $a\in R$ હોય તો સાબિત કરો કે $aR=\left\{ar\middle| r\in R\right\}$એ Rનું દ્વિપક્ષીય ઇષ્ટમંડળ છે. ૫

ENGLISH VERSION

Instructions : (1) As per the Instruction No.**1** of Page No.**1**.

(2) Figures to the **right** indicate marks of the question.

(3) Follow usual notations.

1 Answer the following questions : **15**

(1) If $a \equiv b \pmod{n}$ and $c \equiv d(\text{mod } n)$ then prove that $ac \equiv bd(\text{mod} n)$.

(2) If G is a finite group and $a \in G$ then prove that $a^{0(G)} = e$.

(3) Find the zero divisors in a commutative ring $\langle R, +_6, X_6 \rangle$; where $R = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Check whether the ring R is an integral domain.

(4) Let R be an Euclidean ring. If b is a unit of R then prove that $d(a) = d(ab)$ for all non-zero a in R.

(5) Define the following terms :

(1) Index of a subgroup

(2) Associative ring

(3) Prime element in an Euclidean ring.

2 (a) State Euclidean algorithm. If a and b are two non-zero integers then prove that *gcd(a, b)* is unique. Also prove that $\gcd(a, b) = 1$ and $a|bc \Rightarrow a|c$. **7**

(b) In usual notations prove that : **6**

(1) $ab \equiv ac \pmod{n}$ and $gcd(a, c) = 1 \Rightarrow b \equiv c \pmod{n}$

(2) $a|x,\ b|x,$ and. $gcd(a, b) = 1 \Rightarrow (ab)|x$.

(c) Prove that the n^{th} roots of units form a group under multiplication. **5**

OR

2 (a) Prove that the relation "Congruence module *n;* $n \in I$" is an equivalence relation on a set of integers. Also prove that it has an distinct equivalence classes. **7**

(b) If a and b are positive integers then prove that $lcm\ (a,\ b) \cdot gcd(a,b) = ab$. **6**

(c) Prove that every group of four elements is abelian. **5**

3 (a) Let H be a non-empty subset of a group G. If it is closed under multiplication then prove that H is a subgroup of G. **7**

Prove also that the centre of a group G is a subgroup of G.

(b) Let H be a subgroup of a group G. In the usual notations prove that $Ha = \{x \in G \mid a \equiv x \pmod{H}\}$. **6**

(c) Define an order of an element in a finite group G. Hence find an order of every element in S_3. **5**

OR

3 (a) Let H and K be two subgroups of a group G. Prove that HK is a subgroup of G if and only if $HK = KH$. **7**

(b) Prove that there is a one-to-one correspondence between any two left cosets of a subgroup H in a group G. **6**

(c) If in a group G, $a^5 = e$ and $aba^{-1} = b^2$ for some $a, b \in G$ then find $0(b)$. **5**

4 (a) Prove that a subgroup N of a group G is normal in G if and only if the product of two right cosets of N in G is again a right coset of N in G. **7**

(b) Let ϕ be a homomorphism of a group G into a group $\bar{G}$ with kernel K then prove that K is a normal subgroup of G. If $K = (e)$ then prove that ϕ is an isomorphism. **6**

(c) Let $S_3 = \{e, \phi, \psi, \psi^2, \phi\psi, \phi\psi^2\}$ and $\bar{G} = \{e, \phi\}$. Define a mapping $f : S_3 \to \bar{G};\ f(\phi^i\psi^j) = \phi^i$. Then prove that f is a homomorphism. **5**

OR

4 (a) Let ϕ be a homomorphism of a group G on to a group $\bar{G}$ with kernel K. Then prove that G/K is isomorphic to $\bar{G}$. **7**

(b) Let $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \middle| a, b, d \in R \text{ and } ad \neq 0 \right\}$ be a group under multiplication. Let $N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| b \in R \right\}$. Prove that N is a normal subgroup of G. **6**

(c) Prove that every permutation $f \in S_n$ can be uniquely expressed as a composition of disjoint cycles. Find the cycles of a permutation **5**

$$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 6 & 4 & 7 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

5 (a) Let ϕ be a homomorphism from a ring R into a ring $\bar{R}$. Then prove that ϕ is an isomorphism if and only if $\ker \phi = \{0\}$. **7**

(b) If D is an integral domain and D is of finite characteristic then prove that the characteristic of D is a prime number. **6**

(c) Let $J(\sqrt{2}) = \{ m + n\sqrt{2} \mid m, n \in I \}$ be a ring under usual addition and multiplication. Define $\phi : J(\sqrt{2}) \to J(\sqrt{2})$, by $\phi(m + n\sqrt{2}) = m - n\sqrt{2}$ then prove that ϕ is an onto homomorphism with kernel $\phi = \{0\}$. **5**

OR

5 (a) Prove that a finite integral domain is a field. **7**

(b) Let R be a commutative ring. Prove that R is an integral domain if and only if for $a, b, c \in R$ with $a \neq 0$ then $ab = ac \Rightarrow b = c$. **6**

(c) Let J be a ring of integers. Let J_n be the right of integers modulo n, where $n \in I$. Define $\phi : J \to J_n$ by $\phi(a) = remainder$ of a on division by n. Show that ϕ is an onto homomorphism. Also find kernel ϕ. **5**

6 (a) Prove that the element a in an Euclidean ring is a unit if and only if $d(a) = d(1)$. **7**

(b) Show that an Euclidean ring possesses a unit element. **6**

(c) Let R be a ring of all real-valued continuous functions defined on a closed unit interval. Let $M = \left\{ f(x) \in R \mid f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \right\}$. Show that M is a maximal ideal of R. **5**

OR

6 (a) Prove that associates relation between two elements of a commutative ring is an equivalent relation. **7**

(b) Let R be an Euclidean domain and $a, b \in R$. If $b \neq 0$ is not a unit of R then show that $d(a) < d(ab)$. **6**

(c) If R is a ring and $a \in R$ then prove that $aR = \{ar \mid r \in R\}$ is a two sided ideal of R. **5**